

सम्बन्धों का मापक तथा सामान्य प्रसंभावता वक्र [Measures of Relationship and Normal Probability Curve]

4.1 रङ्गमान्तर सहसम्बन्ध तथा प्रोडेक्ट मौमेन्ट सहसम्बन्ध (Rank Difference Correlation and Product Moment Correlation)

प्रश्न 1. सह-सम्बन्ध क्या है? पनात्मक तथा ऋणात्मक सह-सम्बन्ध में अन्तर स्पष्ट कीजिए।
(What is correlation? Differentiate clearly negative and positive correlation.)

अथवा

उड़-सम्बन्ध की परिभाषा दीजिए।

(Give the definition of Correlation.)

लह-सम्बन्ध क्या है?

(What is correlation.) अस्यवा

सह-सम्बन्ध गुणांक क्या है? परिकल्पित आंकड़ों से क्रमान्तर विषि द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक निकालें तथा प्राप्त सह-सम्बन्ध की कौन।

modul

जयदा सह-सम्बन्ध क्या है? किसी परिकल्पित आंकड़ों का पियररस प्रोडक्ट मोमेन्ट सह सम्बन्ध गुणांक की गणना की पदानुसार प्रक्रिया

(What is correlation? Explain the stepwise procedure to calculate Product Moment Coefficient of correlation from a hypothetical data. Also interpret the obtained coefficient of correlation.)

अंग्रेजी

वह-सचिव से आपका क्या वार्तार्थ है?

(What do you mean by correlation.) अध्ययन

सह-सम्बन्ध गणांक से आपका क्या अभिप्राय है?

(What do you mean by coefficient of correlation?)

उत्तर-सह-सम्बन्ध (Correlation)—**अर्थ (Meaning)** :- आर. सी. लैथ्राप (R. C. Lathrop) के अनुसार, 'सह-सम्बन्ध' वह गणितीयों में पाये जाने वाले संयुक्त सम्बन्ध की ओर संकेत करता है।' (Correlation indicates a joint relationship between two variables.—R.C. Lathrop)

गिलफोर्ड (Guilford) के अनुसार, “सह-सम्बन्ध गुणांक वह अकेली संख्या है जो यह बताती है कि दो वस्तुएं किस सीमा तक दूसरे से सह-सम्बन्धित हैं तथा एक के परिवर्तन दूसरे के परिवर्तनों को किस सीमा तक प्रभावित करते हैं।” (A coefficient of correlation is a single number that tells us to what extent two things are related, to what extent variations in the one go with the variations of the other.—Guilford)

सह-सम्बन्ध से पहले जिन सांख्यिकी विधियों का वर्णन किया गया है। वे सभी केवल एक चर से सम्बन्धित हैं। लेकिन दैनिक जीवन में देखते हैं कि कुछ चर आपस में इस तरह से सम्बन्धित होते हैं कि एक चर में आया परिवर्तन दूसरे चर के साथ जुड़ होता है तथा उसे प्रभावित करता है। फरग्यूसन (Ferguson, 1966) के अनुसार, ‘‘सह-सम्बन्ध का उद्देश्य दो चरों में पाये जाने वाले सम्बन्ध की मात्रा का चलना लगाना होता है।’’ दूसरे शब्दों में, जब दो चर इस प्रकार से सम्बन्धित हों कि एक चर के बढ़ने से पहला चर बढ़े या घटे या इन्हें विपरीत हो।

दो या दो से अधिक चरों (Variables) के सह-सम्बन्ध की मात्रा (Degree) को सह-सम्बन्ध गुणांक (Coefficient of Correlation) द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। सह-सम्बन्ध को ग्रीक भाषा के शब्द रोह (RHO) द्वारा या P या r संकेतों से प्रदर्शित किया जाता है। प्रत्येक संकेत का सम्बन्ध अलग-अलग सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की विधियों से होता है। P, R तथा r का अर्थ सह-सम्बन्ध गुणांक से होता है। शुद्धता की दृष्टि से इनमें अन्तर होता है। 'r' का मान सह-सम्बन्ध का सबसे अधिक शुद्ध मान होता है। R तथा P का मान सरलता से तथा कम समय में ज्ञात किया जा सकता है। 'r' की गणना में अपेक्षाकृत कम समय लगता है।

सह-सम्बन्ध के प्रकार

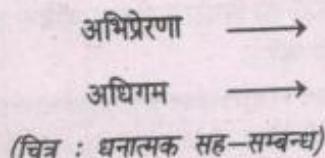
(Types of Correlation)

सह-सम्बन्ध मुख्यतः: निम्नलिखित दिशाओं में होता है या सह-सम्बन्ध निम्न प्रकार का होता है –

1. धनात्मक या सकारात्मक या समान दिशा में सह-सम्बन्ध (Positive Correlation)
2. क्रणात्मक या नकारात्मक या विपरीत दिशा में सह-सम्बन्ध (Negative Correlation)
3. शून्य सह-सम्बन्ध (Zero Correlation)
4. रेखात्मक सह-सम्बन्ध (Linear Correlation)
5. वक्रात्मक सह-सम्बन्ध (Curvilinear correlation)

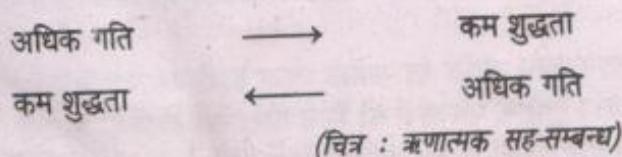
1. धनात्मक या सकारात्मक या समान दिशा में सह-सम्बन्ध (Positive Correlation)—जब एक चर (Variable) की वृद्धि होती है तो उसके फलस्वरूप दूसरे चर में भी वृद्धि होती जाती है या एक चर के घटने से दूसरा चर भी घटता है, तो इसे धनात्मक या सकारात्मक या समान दिशा में सह-सम्बन्ध (Positive Correlation) कहलाता है।

(When two variables change in the same direction it is said to be a positive correlation.) उदाहरणार्थ, अभिप्रेरणा के बढ़ने से अधिगम भी अधिक हो तो अभिप्रेरणा और अधिगम (Motivation and Learning) में धनात्मक सह-सम्बन्ध (Positive Correlation) होगा।



2. क्रणात्मक या नकारात्मक या विपरीत दिशा में सह-सम्बन्ध (Negative Correlation)—जब एक चर (Variable) के फलस्वरूप दूसरे चर की मात्रा घटती है या जब एक चर की मात्रा घटने से दूसरे चर की मात्रा में वृद्धि होती है तो इसे विपरीत दिशा में सह-सम्बन्ध या क्रणात्मक या नकारात्मक (Negative Correlation) कहते हैं। (When two variables changes in opposite direction it is said to be a negative correlation.)

उदाहरणार्थ, यदि कोई कार्य करने की गति अधिक है तो शुद्धता कम होगी या अधिक शुद्धता (Accuracy) के लिये कम समय (Speed) चाहिये।



3. शून्य सह-सम्बन्ध (Zero Correlation)—जब एक चर (Variable) के बढ़ने या घटने से दूसरा चर प्रभावित नहीं होता है तो उसे शून्य सह-सम्बन्ध (Zero correlation) कहते हैं। उदाहरणार्थ, जब आर्थिक स्तर का प्रभाव उत्तीर्ण प्रतिशत पर विल्कुल नहीं होता है।

दोनों चरों अर्थात् आर्थिक स्तर और उतीर्ण प्रतिशत में शून्य सह-सम्बन्ध कहलायेगा। दूसरे शब्दों में शून्य सह-सम्बन्ध कोई सह-सम्बन्ध नहीं होता। बल्कि यह तो सह-सम्बन्ध की कमी दर्शाता है। जब एक चर के मूल्य में परिवर्तन हो तो किन दूसरे चर के मूल्य में कोई परिवर्तन नहीं होता तो ऐसी स्थिति में सह-सम्बन्ध शून्य कहलायेगा।

4. रेखात्मक सह-सम्बन्ध (Linear Correlation)—ग्राफ के माध्यम से दिखाये जाने वाले सह-सम्बन्ध को जब एक सीधी-रेखा जड़कित किया जाता है तो वह रेखात्मक सह-सम्बन्ध कहलाता है। अर्थात् जब दो चरों के प्राप्तांकों में इस प्रकार परिवर्तन हो कि उनका उन एक रेखा की प्रवृत्ति में हो या उनका ग्राफ एक सरल रेखा हो तो, इस प्रकार के सह-सम्बन्ध को रेखात्मक सह-सम्बन्ध (Linear Correlation) कहते हैं।

5. वक्रात्मक सह-सम्बन्ध (Curvilinear Correlation)—यह सह-सम्बन्ध वह सह-सम्बन्ध होता है जिसमें एक विशेष सीमा तक दोनों में सह-सम्बन्ध धनात्मक (Positive) होता है तथा इस सीमा के पश्चात् सह-सम्बन्ध ऋणात्मक (Negative) हो जाता है। दूसरे शब्दों में जब एक चर के मूल्यों का अनुपात दूसरे चर के मूल्यों के अनुपात के साथ स्थिर नहीं है तो वह वक्रात्मक सह-सम्बन्ध की स्थिति होती है।

सह-सम्बन्ध की व्याख्या—(Interpretation of Correlation)—सह-सम्बन्ध का मूल्य निकालने के पश्चात् उसकी व्याख्या जल्दी अति आवश्यक है। बिना व्याख्या के गणना का कोई अर्थ नहीं रह जाता। जब दो चरों (Variables) में परिवर्तन समान तथा एक ही दिशा में हो तो यह पूर्ण धनात्मक सह-सम्बन्ध +1.0 होता है। जब दो चरों में परिवर्तन समान परन्तु विपरीत दिशा में हो तो यह पूर्ण सह-सम्बन्ध (-1.0) कहलायेगा। इस तरह के सह-सम्बन्ध पूर्ण सह-सम्बन्ध (Perfect correlation) कहलाते हैं।

सह-सम्बन्ध गुणांक (Coefficient of Correlation) का मूल्य कभी 1.00 से अधिक नहीं आना चाहिए। अधिक मूल्य गणना की दृष्टि के कारण हो सकता है। सह-सम्बन्ध की मात्रा से पहले यदि (+) चिन्ह आता है तो उसे धनात्मक सह-सम्बन्ध (Positive Correlation) कहते। इसी प्रकार यदि (-) चिन्ह आता है तो उसे ऋणात्मक सह-सम्बन्ध (Negative Correlation) कहेंगे।

गिलफोर्ड (Guilford, 1958) ने सह-सम्बन्ध की मात्रा का वर्गीकरण इस प्रकार किया है—

सहसम्बन्ध गुणांक की मात्रा (Quantity of Coefficient of Correlation)	सम्बन्ध (Relationship)
1. .00 to $\pm .20$	नगण्य (Negligible)
2. $\pm .21$ to $\pm .40$	निम्न (Low)
3. $\pm .41$ to $\pm .60$	साधारण (Moderate)
4. $\pm .61$ to $\pm .80$	उच्च (High)
5. $\pm .81$ to $\pm .99$	अति उच्च (Very High)
6. ± 1.00	पूर्ण सह-सम्बन्ध (Perfect Correlation)

इस वर्गीकरण को आधार बनाकर हम प्राप्त सह-सम्बन्ध गुणांक की व्याख्या कर सकते हैं। उदाहरणार्थ यदि प्राप्त सह-सम्बन्ध गुणांक $\pm .63$ है तो हम कह सकते हैं कि दो चरों में उच्च धनात्मक सह-सम्बन्ध (High Positive Correlation) है। इसी प्रकार यदि सह-सम्बन्ध गुणांक -15 है तो हम कह सकते हैं कि दो चरों में नगण्य ऋणात्मक सह-सम्बन्ध (Negligible Negative Correlation) है।

सम्बन्ध की मण्ना

Calculation of Correlation)

सह-सम्बन्ध मापनों का प्रयोग चरों की प्रकृति के अनुसार करते हैं। जैसे, जब मात्रात्मक प्रकार (Quantitative Interval or Ratio Types) के होते हैं तो (पियरसन Pearson) द्वारा बताई पियरसन प्रोडक्ट मोमेंट सहसम्बन्ध' (Pearson Product Moment Correlation) विधि का प्रयोग किया जाता है।

इसी प्रकार क्रम को सूचित करने वाले चरों (Ordinal Variables) में सम्बन्ध को ज्ञात करने के लिये 'क्रमान्तर सह-सम्बन्ध (Rank Order Correlation Method)' का प्रयोग किया जाता है। इस विधि की खोज प्रो. चार्ल्स स्पीयरमैन (Prof. Charles Spearman) ने की थी। इस विधि द्वारा दो भिन्न-भिन्न गुणों (Traits), विषयों (Subjects) परीक्षण के परिणामों आदि में सह-सम्बन्ध की किया जा सकता है। इस विधि का प्रयोग हम तब करते हैं जब सामान्य विश्वसनीयता की आवश्यकता हो तथा सह-सम्बन्ध की ज्ञान शीघ्रता से करनी हो।

इस प्रकार हम देखते हैं कि सह-सम्बन्ध गुणांक निकालने की निम्न दो विधियाँ हैं। जिनका वर्णन इस अध्याय में किया जा रहा है। विधियाँ और भी हैं जिनका वर्णन इस पुस्तक में शामिल नहीं है।

1. क्रमान्तर या स्थान क्रम विधि (Rank Difference Method)

2. प्रोडक्ट मोमेंट विधियाँ (Product Moment Methods)

1. क्रमान्तर या स्थान क्रम विधि (Rank Difference Method) – इस विधि की खोज स्पीयरमैन (Spearman) ने की थी। अतः इसे स्पीयरमैन की क्रमान्तर या स्थान क्रम विधि (Spearman's Rank Difference Method) भी कहते हैं। इस विधि का प्रयोग निम्न परिस्थितियों में किया जा सकता है—

- जब सह-सम्बन्ध में सामान्य विश्वसनीयता की आवश्यकता हो।
- जब सह-सम्बन्ध की गणना शीघ्रता से करनी हो।
- जब समूह में इकाईयों की संख्या 30 से कम हो। क्योंकि समूह जितना बड़ा होता जायेगा, इसकी विश्वसनीयता भी कम होती चली जाएगी।
- जब स्थान क्रमों (Rank Order) को महत्व दिया जाना हो तथा अंकों को महत्व न दिया जाये।
- जब अंक अव्यवस्थित (Ungrouped) हों।

इस प्रकार हम देखते हैं कि इस विधि में प्राप्तांकों को महत्व न देकर स्थान क्रमों (Rank Order) को महत्व दिया जाता है तथा समूह जितना बड़ा होता जायेगा, इसकी विश्वसनीयता उतनी कम होती जायेगी।

सहसम्बन्ध की गणना

(Calculation of Correlation)

इस विधि द्वारा प्राप्त सह-सम्बन्ध गुणांक को (RHO) द्वारा दर्शाया जाता है। इसका सूत्र निम्न है—

$$P = 1 - \frac{\sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

यहाँ पर—

P = स्थान-क्रम या क्रमान्तर विधि द्वारा ज्ञान सह-सम्बन्ध

(Coefficient of Correlation calculated from Rank Difference Method)

$\sum D^2$ = क्रम के अन्तरों के वर्गों का कुल जोड़

(Sum of the squares of differences in ranks)

N = कुल आवृत्तियों की संख्या (No. of Frequencies)

विधि (Method)—

- इसकी गणना के लिये दो चरों या परीक्षणों के अंक (Scores) दिये होते हैं। हर परीक्षण के अंकों का क्रम तय करना होता है। जिसे सबसे अधिक अंक प्राप्त करने वाले को प्रथम क्रम (First Rank) उससे कम अंक प्राप्त करने वाले को द्वितीय क्रम (Second Rank) दिया जाता है। इसी प्रकार सभी व्यक्तियों को क्रम प्रदान किया जाता है। ऐसा करने से प्रदान कॉलम को R₁ द्वारा दर्शाया जाता है।
- इसी प्रकार दूसरे परीक्षण के अंकों को क्रम (Rank) देकर उन्हें R₂ कॉलम के रूप में दर्शाया जाता है।
- फिर R₁ और R₂ कॉलम पूरा करने के पश्चात् D कॉलम तैयार किया जाता है अर्थात् R₁ और R₂ का अन्तर लिया जाता है जिसे D कॉलम के रूप में लिखा जाता है अर्थात् D = R₁ - R₂
- इसके पश्चात् D कॉलम में हर अन्तर का वर्ग (Square) किया जाता है जिसे D² कॉलम के रूप में लिखा जाता है।
- D² कॉलम पूरा होने के पश्चात् D² कॉलम के सभी मूल्यों का कुल जोड़ लिया जाता है जिसे $\sum D^2$ के रूप में लिखा जाता है।
- इसके पश्चात् निम्न सूत्र का प्रयोग करके सह-सम्बन्ध गुणांक निकाला जाता है।

$$P = 1 - \frac{\sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

उदाहरण 1. - क्रमान्तर विधि से निम्नलिखित अंकों में सह-सम्बन्ध ज्ञात करना—

गणित— 25, 35, 55, 5, 15, 20, 40, 37, 49, 43
विज्ञान— 20, 23, 35, 7, 15, 10, 33, 30, 40, 25

हल—

Student	Maths Scores	Science Scores	Rank Maths R_1	Rank Science R_2	$R_1 - R_2$ (D)	D^2
A	25	20	7	7	0	0
B	35	23	6	6	0	0
C	45	35	2	2	0	0
D	5	7	10	10	0	0
E	15	15	9	8	1	1
F	20	10	8	9	1	1
G	40	33	4	3	1	1
H	37	30	5	4	1	1
I	49	40	1	1	0	0
J	43	25	3	5	2	4
						$\sum D^2 = 8$

सूत्र -

$$P = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

$$1 - \frac{48}{990} = 1 - \frac{48}{990} = 1 - .048 = +.952 \text{ उत्तर}$$

ब्याख्या (Interpretation) - उपरोक्त आंकड़ों के आधार पर सह-सम्बन्ध गुणांक बताएं सह-सम्बन्ध की मात्रा के वर्गीकरण के उत्तर +.952 का सह-सम्बन्ध अति उच्च धनात्मक (Very High Positive) सह-सम्बन्ध है अर्थात् गणित में अंकों में परिवर्तन होने पर उच्च प्रभाव विज्ञान के अंकों पर भी पड़ेगा।

उदाहरण 2. - निम्न परीक्षणों के अंकों में क्रमान्तर विधि द्वारा सह-सम्बन्ध गुणांक निकालना।

Test I - 63, 60, 57, 45, 43, 40, 30, 26, 21, 20

Test II - 73, 42, 41, 55, 50, 40, 40, 39, 30, 21

हल—इस प्रश्न के अंकों में, Test II में 40 का अंक दो बार आ रहा है। जब अंक एक से अधिक बार आये तो क्रमों का औसत (Average) लेना पड़ता है।

विद्यार्थी	Test (I)	Test (II)	R_1	R_2	$D=R_1 - R_2$	D^2
A	63	73	1	1	0	0
B	60	42	2	4	2	4
C	57	41	3	5	2	4
D	45	55	4	2	2	4
E	43	50	5	3	2	4
F	40	40	6	6.5	0.5	0.25
G	30	40	7	6.5	0.5	0.25
H	26	39	8	8	0	0
I	21	30	9	9	0	0
J	20	21	10	10	0	0
						$\sum D^2 = 16.50$

नोट—इस प्रश्न R₂ में कॉलम में 40 का अंक दो बार आया है जो 6 और 7 क्रम पर है। चूंकि दोनों विद्यार्थियों अर्थात् F = G के अंक 40 अर्थात् बराबर हैं तो ऐसी स्थिति में 6 और 7 क्रम की औसत अर्थात् $\frac{6+7}{2} = 6.5$ क्रम प्रदान किया गया।

यहाँ पर $N=10, \sum D^2 = 16.50$

$$\text{सूत्र} - P = 1 - \frac{6 \sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 16.50}{10 \times 99} = 1 - \frac{99}{990} = 1 - \frac{1}{10}$$

$$= \frac{9}{10} = 0.9 \text{ उत्तर}$$

यह अति उच्च धनात्मक सह-सम्बन्ध है।

2. प्रोडूक्ट मोमेन्ट सह-सम्बन्ध (Product Moment Correlation)—प्रोडूक्ट मोमेन्ट सह-सम्बन्ध विधियों के अन्तर्लंब विधियां आती हैं, जैसे कि—

- (i) वास्तविक मध्यमान विधि (Real Mean Method)
- (ii) कल्पित मध्यमान विधि (Assumed Mean Method)
- (iii) अंक कम करने की विधि (Reduced Score Method)
- (iv) अन्तर विधि (Difference Method)
- (v) शून्य से विचलन की सहायता से सह-सम्बन्ध की गणना (When Deviations are taken from Zero)
- (vi) स्कैटर डायग्राम विधि (Scatter Diagram Method)

उपरोक्त छः सामग्री में से पहली पांच विधियों द्वारा अव्यवस्थित अंक सामग्री के सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना की जाती है लेकिन छठी या स्कैटर डायग्राम विधि द्वारा व्यवस्थित अंक सामग्री का सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जाता है।

इस अध्याय में वास्तविक मध्यमान विधि (Real Mean Method) का ही वर्णन किया गया है तथा इसे पियरसन सह-सम्बन्ध विधि (Pearson's Product Moment Correlation Method) भी कहते हैं।

पियरसन प्रोडूक्ट मोमेन्ट सह-सम्बन्ध या वास्तविक मध्यमान विधि (Pearson's Product Moment Correlation or Real Mean Method)—इस सह-सम्बन्ध को 'r' द्वारा दर्शाया जाता है। यह सभी विधियों से अपेक्षाकृत शुद्ध विधि (Accurate Method) है। यह विधि अव्यवस्थित अंक सामग्री का सह-सम्बन्ध ज्ञात करने के लिये प्रयोग की जाती है।

उपयारणाएं (Assumptions)—

- (i) इस सह-सम्बन्ध को ग्राफ (Graph) द्वारा प्रदर्शित करने पर रेखीय सह-सम्बन्ध (Linear Correlation) प्रदर्शित होता है।
- (ii) प्रामाणिक विचलन (Standard Deviation) का आकार इस सह-सम्बन्ध को मुख्य रूप से प्रभावित करने वाला है।
- (iii) इस सह-सम्बन्ध की गणना तब उपयुक्त होती है जब प्राप्तांकों का वितरण (Distribution of Scores) नियमित (Normal) होता है।

'r' का प्रयोग कब हो? (When to use 'r')—

- (i) जब प्रतिदर्श (Sample) बड़ा हो।
- (ii) जब रेखीय सह-सम्बन्ध की आवश्यकता हो।
- (iii) जब प्राप्तांकों का वितरण सामान्य हो।
- (iv) जब दोनों चरों के प्राप्तांकों का प्रामाणिक विचलनों (Standard Deviation) में अधिक अन्तर न हो या लगभग हों।

विशेषताएं एवं लाभ

Characteristics and Advantages of 'r')

- यह सह-सम्बन्ध गुणांक अपेक्षाकृत अधिक शुद्ध (Accurate) होता है।
- विभिन्न चरों (Variables) के सम्बन्ध विश्लेषण में भी इसका प्रयोग होता है।
- इस 'r' की सहायता से मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की विश्वसनीयता (Reliability) भी ज्ञात की जाती है।

'r' को प्रभावित करने वाले कारक (Factors Affecting 'r')—

- जब N का आकार बड़ा होता है तो सह-सम्बन्ध गुणांक का मान अपेक्षाकृत कम हो जाता है लेकिन उसकी शुद्धता (Accuracy) अधिक होती है।
- इस 'r' को प्रामाणिक विचलन का आकार (Size of Standard Deviation) भी प्रभावित करता है। अर्थात् अधिक प्रामाणिक विचलन का अर्थ है कम सह-सम्बन्ध गुणांक।
- वर्गन्तरों का सामान्य आकार और वर्गन्तरों की सामान्य संख्या होने पर सह-सम्बन्ध गुणांक का मान अधिक शुद्ध (Accurate) होता है। ऐसा व्यवस्थित अंक सामग्री में होता है।

पियर्सन प्रोडक्ट मोमेन्ट सह-सम्बन्ध की गणना (Calculation of Pearson's Product Moment Correlation i.e.

(r))—इस विधि से सह-सम्बन्ध का गुणांक निकालने के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\Sigma x^2 = 134, \Sigma y^2 = 52, \Sigma xy = 48, \Sigma x = 60, \Sigma y = 40,$$

$$N = 10, N = 10, MX = 6, My = 4$$

$$\text{यहाँ पर- } \Sigma x^2 = 134, \Sigma y^2 = 52, \Sigma xy = 48$$

$$\begin{aligned} \text{सूत्र- } r &= \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}} \\ &= \frac{48}{\sqrt{134 \times 52}} = \frac{48}{\sqrt{6968}} = \frac{48}{83.4} \\ r &= 0.5755395 \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 2. निम्नांकित प्रदत्तों से प्रोडक्ट मोमेन्ट विधि द्वारा सह-सम्बन्ध ज्ञात कीजिये तथा अपने परिणाम की व्याख्या कीजिये—
(Calculate the correlation of the following data by product moment method and interpret your result.)

X	17	8	8	20	14	17	21	22	19	30
Y	9	13	7	18	11	2	5	15	26	28

हल—

x	y	$x - M_x = x$	$y - M_y = y$	x^2	y^2	xy
17	9	17-16.6=-0.4	9-13.4=-4.4	0.16	19.36	1.76
8	13	8-16.6=-8.6	13-13.4=-0.4	73.96	0.16	3.44
8	7	8-16.6=-8.6	7-13.4=-6.4	73.96	40.96	55.04
20	18	20-16.6=3.4	18-13.4=4.6	11.56	21.16	15.64
14	11	14-16.6=-2.6	11-13.4=-2.4	6.76	5.76	6.24
17	2	7-16.6=-9.6	2-13.4=-11.4	92.16	129.96	109.44
21	5	21-16.6=4.4	5-13.4=-8.4	19.36	70.56	36.96
22	15	22-16.6=5.4	15-13.4=1.6	129.16	2.56	8.64
19	26	19-16.6=2.	26-13.4=12.6	5.76	158.76	30.24
30	28	30-16.6=13.4	28-13.4=14.6	179.56	213.16	195.64
166	134			$\sum x^2 = 492.4$	$\sum y^2 = 662$	$\sum xy = 463.04$

$$\sum x^2 = 492.4, \sum y^2 = 662.4, \sum xy = 463.04$$

$$M_x = \frac{166}{10} = 16.6, M_y = \frac{134}{10} = 13.4$$

सूत्र-

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}}$$

$$= \frac{463.04}{\sqrt{492.4 \times 662.4}} \\ = \frac{463.04}{\sqrt{326165.76}} = \frac{463.04}{571.1092364} \\ = 0.810773089 \\ = 0.81 \text{ उत्तर}$$

व्याख्या - 0.81 सह-सम्बन्ध अति-उच्च (Very High) सह-सम्बन्ध माना जाता है।

प्रश्न 3. निम्नलिखित प्रदत्तों का प्रोजेक्ट मोमेंट विधि द्वारा सह-सम्बन्ध ज्ञात कीजिये।

(Calculate the correlation of the following data by product moment correlation method.)

(KUK, April 2001)

परीक्षण X-53, 57, 59, 62, 63, 65, 64, 68, 70, 74, 74, 71,										
परीक्षण Y-24, 27, 36, 30, 28, 32, 34, 32, 30, 36, 38, 43										

हल-

x	y	$x - M_x = x$	$y - M_y = y$	x^2	y^2	xy
53	24	53-65=-12	24-32.5=-8.5	144	72.25	102
57	27	57-65=-8	27-32.5=5.5	64	30.25	44
59	36	59-65=-6	36-32.5=3.5	36	12.25	21
62	30	62-65=-3	30-32.5=-2.5	9	6.25	7.5
63	28	63-65=-2	28-32.5=-4.5	4	20.25	9
65	32	65-65=0	32-32.5=-0.5	0	0.25	0
64	34	64-65=-1	34-32.5=+0.5	1	2.25	1.5
68	32	68-65=3	32-32.5=-0.5	9	0.25	1.5
70	30	70-65=5	30-32.5=-3.5	25	6.25	12.5
74	36	74-65=9	36-32.5=3.5	81	12.25	31.5
74	38	74-65=9	38-32.5=5.5	81	30.25	49.5
71	43	71-65=6	43-32.5=10.5	36	110.25	63
780	390			$\Sigma x^2 = 490$	$\Sigma y^2 = 303$	$\Sigma xy = 343$

$$\sum x^2 = 490, \sum y^2 = 303, \sum xy = 343$$

$$M_x = \frac{780}{12} = 65, M_y = \frac{390}{12}$$

यहाँ पर-

$$\sum x^2 = 490, \sum y^2 = 303, \sum xy = 343, N = 12$$

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}} = \frac{343}{\sqrt{490 \times 303}}$$

$$= \frac{343}{\sqrt{148470}} = \frac{343}{385}$$

$r = 0.89$ उत्तर

प्रम 4. निम्नलिखित प्राप्तांकों के जोड़ों के लिये प्रोडक्ट मोमेन्ट विधि द्वारा सह-सम्बन्ध ज्ञात कीजिए और अपने परिणामों की कौनिए।

(Calculate the correlation of the following set of scores by Product Moment Correlation Method and interpret your result.)

X - 40, 44, 46, 47, 50, 52, 51, 55, 56, 60, 60, 63

Y - 12, 15, 23, 17, 16, 20, 22, 20, 18, 23, 25, 29

हल-

x	y	$x-M_x=x$	$y-M_y=y$	x^2	y^2	xy
40	12	40-52=-12	12-20=-8	144	64	96
44	15	44-52=-8	15-20=-5	64	25	40
46	23	46-52=-6	23-20=3	36	9	-18
47	17	47-52=-5	17-20=-3	25	9	15
50	16	50-52=-2	16-20=-4	4	16	8
52	20	52-52=0	20-20=0	0	0	0
51	22	51-52=-1	22-20=2	1	4	-2
55	20	55-52=3	20-20=0	9	0	0
56	18	56-52=4	18-20=-2	12	4	-8
60	23	60-52=8	23-20=3	64	9	24
60	25	60-52=8	25-20=5	64	25	40
63	29	63-52=11	29-20=9	121	81	99
624	240			$\Sigma x^2=544$	$\Sigma y^2=246$	$\Sigma xy=294$

$$\sum x^2 = 544, \sum y^2 = 246, \sum xy = 294$$

$$M_x = \frac{624}{12} = 52, M_y = \frac{240}{12} = 20$$

उत्तर- $\sum x^2 = 544 \quad \sum y^2 = 246 \quad \sum xy = 294 \quad N = 12$

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}} = \frac{294}{\sqrt{544 \times 246}}$$

$$r = \frac{294}{\sqrt{133824}} = \frac{294}{365.7} = 0.8039576$$

$r = 0.80$ उत्तर

व्याख्या - 0.80 सह-सम्बन्ध अति उच्च (Very High) माना जाता है।

4.2 आंशिक तथा बहु-सम्बन्ध

(Partial and Multiple Correlation Meaning, Assumptions, Computations and Uses)

प्रश्न 1. आंशिक सह-सम्बन्ध से आपका क्या अभिप्राय है? इसके प्रमुख प्रकारों पर प्रकाश डालिये।

(What do you understand by partial correlation? Throw light on its main types.)

(M.D.U. 1st Sem. 2013)R

उत्तर—दो चरों के बीच पाया जाने वाला आंशिक सह-सम्बन्ध उस सह-सम्बन्ध को कहते हैं जो अन्य प्रकार के चरों के प्रभाव करके उन दोनों चरों के बीच पाये जाने वाले सह-सम्बन्ध के बारे में बताता है। आंशिक सह-सम्बन्ध (Partial Correlation) एक प्रकार का बहु-चर विधि (multi-variable) चर होता है तथा इस प्रकार का आंशिक सह-सम्बन्ध बहु सम्बन्ध (Multiple Correlation) तथा कारण-विश्लेषण (Factor analysis) से सम्बन्धित होता है।

आंशिक-सह-सम्बन्ध की परिभाषा (Definition of Partial Correlation)—आंशिक सह-सम्बन्ध के अर्थ के सम्बन्ध में निम्नरूप तथा फक्टर दी गई परिभाषा निम्न प्रकार से है—

गिलफोर्ड तथा फ्रक्टर (1983)—के अनुसार, “आंशिक सह-सम्बन्ध दो चरों के बीच वह सह-सम्बन्ध होता है जो इन दोनों सह-सम्बन्ध किये जाने वाले चरों पर तीसरे प्रकार के चर या अन्य प्रकार के चरों के प्रभाव को शून्य या रद्द करता है।” “A partial correlation between two variables is one that nullifies the effect of a third variable or other variables upon both the variables being corrected.” —Guilford & Factor, 1983)

आंशिक-सह-सम्बन्ध के प्रकार (Types of Partial Correlation)—आंशिक-सह-सम्बन्ध मुख्य स्पष्ट से निम्नलिखित दो त्रिकार का होता है।

- (i) प्रथम-कोटि आंशिक सह-सम्बन्ध (First order partial correlation)
- (ii) द्वितीय-कोटि आंशिक सह-सम्बन्ध (Second order partial correlation)

(i) **प्रथम-कोटि आंशिक सह-सम्बन्ध (First order partial correlation)**—प्रथम कोटि आंशिक सह-सम्बन्ध का अर्थ है कि जब हम एक चर के प्रभाव को दूर करके दो चरों के मध्य सह-सम्बन्ध ज्ञात करते हैं तो इस प्रकार के सह-सम्बन्ध को प्रथम कोटि आंशिक-सह-सम्बन्ध के नाम से जाना जाता है।

प्रथम कोटि आंशिक सह-सम्बन्ध को ज्ञात करने का सूत्र (Formula for Obtaining First Order Partial Correlation)—प्रथम कोटि के सह-सम्बन्ध को निम्नलिखित सूत्र की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है—

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}}$$

उपरोक्त दिये गये सूत्र में r = सह-सम्बन्ध

1 और 2 = वह दो चर जिनके मध्य सह-सम्बन्ध ज्ञात करना है।

3 = वह चर जिसके प्रभाव को रद्द या खत्म करके चर 1 तथा चर 2 के बीच सह-सम्बन्ध ज्ञात करना है।

(ii) **द्वितीय कोटि आंशिक सह-सम्बन्ध (Second Order Partial Correlation)**—इस प्रकार का आंशिक सह-सम्बन्ध उस सह-सम्बन्ध को कहते हैं जिसके अन्तर्गत दोनों सम्बन्धित दिये जाने वाले चरों पर अन्य चरों के पड़ने वाले प्रभाव को नियन्त्रित करके उनसे सम्बन्धित सह-सम्बन्ध के बारे में पता लगाया जाता है। द्वितीय कोटि आंशिक सह-सम्बन्ध को निम्नलिखित सूत्र की सहायता ने ज्ञात किया जा सकता है—

$$r_{12.34} = \frac{r_{12.4} - r_{14.3}r_{24.3}}{\sqrt{(1 - r_{14.3}^2)(1 - r_{24.3}^2)}}$$

यहाँ पर r = सह-सम्बन्ध

1 और 2 = वह दो प्रकार के चर जिनके मध्य सह-सम्बन्ध ज्ञात करना है।

3 और 4 = वह दोनों चर जिनके प्रभाव के बारे में नियन्त्रित 1 तथा 2 के मध्य सह-सम्बन्ध की जानकारी प्राप्त करना है।

अतः उपरोक्त विवरण के आधार पर निष्कर्ष रूप में यह कहा जा सकता है कि किसी भी आंकड़े (Data) के द्वारा आंशिक-सहसम्बन्ध (Partial Correlation) ज्ञात करने के लिये यह जरूरी है कि उन आँकड़ों की सहायता से पियरसन आर (Pearson-r) को ज्ञात किया जाना संभव हो क्योंकि आंशिक-सह-सम्बन्ध (Partial Correlation) का मुख्य आधार दो चरों के मध्य पियरसन-आर (Pearson-r) होता है जिसे शून्य-कोटि सह-सम्बन्ध कहा जाता है।

आंशिक-सहसम्बन्ध की मानक-त्रुटि निकालने का सूत्र (Formula for getting Standard Error)

आंशिक-सह-सम्बन्ध की मानक त्रुटि को निकालने का सूत्र निम्नलिखित प्रकार से है—

$$SE = \frac{1}{\sqrt{N - m}}$$

यहाँ पर SE = मानक त्रुटि (Standard Error)

N = स्वातंत्र्य मात्रा की संख्या (Number of degree of freedom)

m = चरों से सम्बन्धित कुल संख्या (Total number of variables)

आंशिक-सह-सम्बन्ध (Partial Correlation) को उतना ही अधिक विश्वसनीय (Reliable) तथा वास्तविक माना जाता है जितनी मानक-त्रुटि (Standard Error) कम होती है।

लघूतरात्मक प्रश्न (Short Answer Type Questions)

प्रश्न 1. आंशिक सह-सम्बन्ध के अर्थ तथा परिभाषा को स्पष्ट कीजिये।

(Define the meaning of Partial Correlation and Definition.)

अथवा

आंशिक सह-सम्बन्ध क्या होता है? परिभाषित कीजिये।

उत्तर—दो चरों के बीच पाया जाने वाला आंशिक सह-सम्बन्ध उस सह-सम्बन्ध को कहते हैं जो अन्य प्रकार के चरों के इन दो चरों के बीच पाये जाने वाले सह-सम्बन्ध के बारे में बताता है। आंशिक सह-सम्बन्ध (Partial Correlation) एक प्रकार का बहु-चर विधि (multi-variable) चर होता है तथा इस प्रकार का आंशिक सह-सम्बन्ध बहु सम्बन्ध (Multiple correlation) तथा कारक-विश्लेषण (Factor analysis) से सम्बन्धित होता है।

आंशिक-सह-सम्बन्ध की परिभाषा (Definition of Partial Correlation)—आंशिक सह-सम्बन्ध के अर्थ के लिए गिलफोर्ड तथा फ्रॉक्टर द्वारा दी गई परिभाषा निम्न प्रकार से है:—

गिलफोर्ड तथा फ्रॉक्टर (1983)—के अनुसार “आंशिक सह-सम्बन्ध दो चरों के बीच वह सह-सम्बन्ध होता है जो इन दो सह-सम्बन्ध किये जाने वाले चरों पर तीसरे प्रकार के चर या अन्य प्रकार के चरों के प्रभाव को शून्य या रद्द करता है।” (“A partial correlation between two variables is one that nullifies the effect of a third variable or other variables upon both the variables being corrected.” —Guilford & Focor, 1983).

प्रश्न 2. आंशिक सह-सम्बन्ध के प्रकारों के नाम बताएं।

उत्तर—आंशिक-सह-सम्बन्ध मुख्य रूप से निम्नलिखित दो प्रकार का होता है—

- (i) प्रथम-कोटि आंशिक सह-सम्बन्ध (First Order Partial Correlation)
- (ii) द्वितीय-कोटि आंशिक सह-सम्बन्ध (Second Order Partial Correlation)

प्रश्न 3. प्रथम कोटि आंशिक सह-सम्बन्ध के अर्थ को सूत्र सहित बताएं।

अथवा

प्रथम कोटि आंशिक-सह-सम्बन्ध को सूत्र सहित स्पष्ट करें।

उत्तर—प्रथम-कोटि आंशिक सह-सम्बन्ध (First Order Partial Correlation)—प्रथम कोटि आंशिक सह-सम्बन्ध कोटि है कि जब हम एक चर के प्रभाव को दूर करके दो चरों के मध्य सह-सम्बन्ध ज्ञात करते हैं तो इस प्रकार के सह-सम्बन्ध कोटि आंशिक-सह-सम्बन्ध के नाम से जाना जाता है।

- = का संख्या 11 तथा चर-संख्या 3 के मध्य पाये जाने वाला सह-सम्बन्ध
- = का संख्या 2 तथा चर-संख्या के मध्य पाये जाने वाला सह-सम्बन्ध

4.4 सामान्य सम्भाव्यता वक्र : अर्थ, विशेषताएँ तथा प्रयोग (Normal Probability Curve : Meaning, Characteristics and Applications)

ज्ञान। सामान्य वितरण से क्या अभिप्राय है? सामान्य वितरण की विशेषताएँ बताएं।

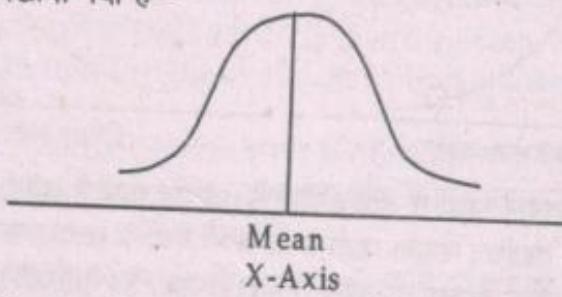
ज्ञान। What are the characteristics of Normal Distribution?

ज्ञान। भी अध्यापक को सामान्य वितरण (Normal Distribution) का बोध होना आवश्यक होता है। क्योंकि उसी का उपयोग करता है वह सामान्य वितरण की धारणाओं पर ही आधारित होती है। साधारणतया हम जितनी अवलोकन (Number of Observations) करते हैं, हमारी धारणा (Assumption) यही होती है कि अवलोकनों की वह वितरित (Normally Distributed) होती है। उदाहरणार्थ, यदि हमारे अवलोकनों (Observations) की वितरित अधिक हैं तो वे अवलोकन सामान्य रूप से वितरित (Normally Distributed) होते हैं। लेकिन यह सामान्य-वितरण निम्नतिथित दो शर्तें पूरी होती हैं—

ज्ञान। अवलोकन अभिनति (Biased) न हो।

ज्ञान। अवलोकन प्रतिनिधित्व (Observations are representative) हो।

ज्ञान। शिक्षा एवं मनोविज्ञान में जिन गुणों का मूल्यांकन किया जाता है, उनका वितरण सामान्य सम्भाविता वक्र (Normal Curve) के रूप में होता है। आज तक जितनी भी परीक्षाएँ ली गई हैं उनका परिणाम प्रायः ऐसा होता है कि अधिक विद्यार्थियों या विद्यार्थियों की संख्या और कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कम रहती है। जिनके अंक अधिक होती हैं। ऐसे प्राप्त अंकों को सामान्य विभाजित प्राप्त अंक (Normally Distributed Scores) कहते हैं। अतः इन अंकों का ग्राफ बनाएँ तो ग्राफ के मध्य में अधिकतम अंक होते हैं, निम्नतम अंकों के सिरे पर तथा उच्चतम अंकों की ओर अंक होते हैं। यदि हम इन अंकों का वक्र (Curve) खींच कर X-Axis पर ऊपर से X-Axis की ओर से लम्ब (Vertical) मध्य में खींचे तो वक्र और X-Axis के होने पर दो भाग एक जैसे ही बनेंगे तथा क्षेत्र (Area) में भी लगभग ज्ञान कि निम्न चित्र में दिखाया गया है—



ज्ञान। इन प्रकार के वितरण को सामान्य-वितरण (Normal Distribution) कहते हैं तथा इन अंकों से बने वक्र (Curve) 'सम्भाव्यता वक्र' (Normal Probability Curve) कहा जाता है।

ज्ञान। कह सकते हैं कि प्रारम्भ में मूल्यों की आवृत्तियां (Frequencies) कम होती हैं। धीरे-धीरे आवृत्तियां बढ़ती जाती हैं और अन्त में जाती है। यदि इन आवृत्तियों को बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रदर्शित किया जाए तो घंटी के आकार का वक्र (Bell Shaped Curve) बनता है। इस वक्र को यदि बीच से मोड़ दिया जाए तो मोड़ के एक ओर का वक्र दूसरी ओर के वक्र को पूर्ण रूप से ढक लेगा। इस वितरण आदि सभी एक ही बिन्दु पर होते हैं।

ज्ञान। (Normal Curve) द्वारा प्रदर्शित आवृत्ति वितरण (Frequency Distribution) की विशेषताओं को समझना अति ज्ञान। इन विशेषताओं का विवरण निम्न दिया गया है—

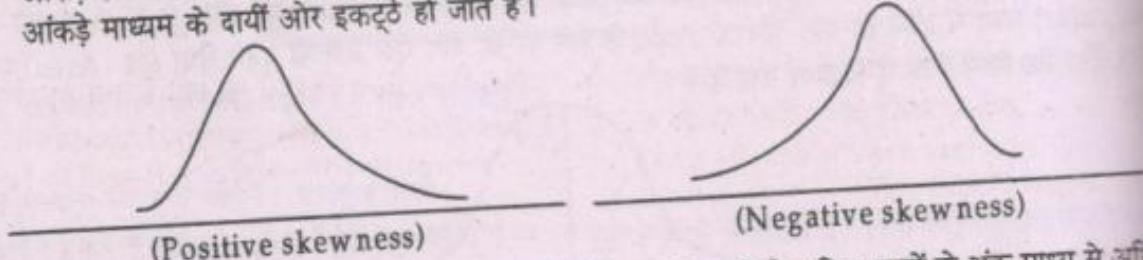
ज्ञान। वितरण की विशेषताएँ (Characteristics of Normal Distribution)—अंकों के सामान्य वितरण के परिणामस्वरूप ज्ञान। बनते हैं उसे सामान्य वक्र (Normal Curve) या सामान्य सम्भावित वक्र (Normal Probability Curve) कहते हैं। इस वितरण होती है जिन्हें समझना अति आवश्यक है।

ये विशेषताएं निम्नलिखित हैं—

- (i) इसकी आकृति घंटाकार (Bell Shaped) होती है अर्थात् यह बीच से उठा हुआ और दोनों सिरों की ओर चढ़ता है। से गिरा या झुका हुआ होता है।
- (ii) इससे मध्यमान, मध्यांक और बहुलांक (Mean, Median and Mode) एक ही बिन्दु पर होते हैं।
- (iii) यदि इसके बीच में एक रेखा खींच दी जाये तो इसके बराबर भाग हो जाते हैं। इस रेखा के किसी एक ओर 50% आवृत्तियां आ जाती हैं।
- (iv) यह वक्र (Curve) आधार रेखा को अनन्त पर स्पर्श करता है।
- (v) इस वक्र में मध्यमान बिन्दु पर स्थित कोटि की ऊंचाई अधिकतम होती है।
- (vi) इनमें मध्यांक के निकट अधिक आवृत्ति होती है। तथा जैसे-जैसे मध्यांक से दूर जाते हैं आवृत्ति (Frequency) घटती है।
- (vii) सामान्य वितरण में विचलन दो प्रकार का होता है—विषमता (Skewness) और कुकुदता (Kurtosis) विषमता से लेकर एसी स्थिति में वितरण के माध्य, मध्यांक तथा बहुलांक एक ही बिन्दु पर न पड़कर अलग अलग पड़ते हैं। विषमता में सामान्य वक्र की आकृति घंटाकार (Bell Shaped) नहीं रहती।

गैरेट (Garrett) के अनुसार, “किसी भी वितरण को विषम तब कहा जाता है जबकि उस वितरण का मध्यमान और मध्यांक में अलग-अलग होते हैं तथा संतुलन एक तरफ से बदलकर दूसरी ओर हो जाता है चाहे वह बाईं ओर हो या दाँई ओर हो और इनमें से एक अधिक अलग होता है। तथा विषमता में वितरण के माध्य, मध्यांक दोनों का मान एक ही होता है। तथा विषमता में वितरण के माध्य तथा मध्यांक दोनों का मान एक ही होता है। तथा विषमता में वितरण के माध्य तथा मध्यांक जितना एक दूसरे के अधिक समीप होंगे, उतनी ही वक्र में विषमता कम आयेगी। तथा उतना ही वितरण सम होगा।

- (viii) विषमता (Skewness) भी दो प्रकार की होती है—सकारात्मक (Positive Skewness) विषमता और नकारात्मक (Negative Skewness) विषमता। सकारात्मक विषमता में अधिकतर आंकड़े बायीं ओर रहते हैं तथा दायीं ओर आंकड़े होते हैं। अर्थात् माध्य से कम वाले आंकड़े बहुत अधिक होते हैं। नकारात्मक विषमता (Negative Skewness) में आंकड़े माध्यम के दायीं ओर इकट्ठे हो जाते हैं।



- (ix) कई बार जब वितरण का रेखाचित्र बनाया जाता है तो अपने मध्य में आवश्यकता से अधिक ऊंचा (Peaked) है या फिर आवश्यक से अधिक समतल या चपटा (Flat) हो जाता है। ऐसी अवस्था को कुकुदता (Kurtosis) कहा जाता है। जब वक्र अधिक ऊंचा हो तो उसे लैप्टोकर्टिक (Leptokurtic) कहा जाता है, जब-जब चपटा होता है तो उसे प्लॉटोकर्टिक (Platokurtic) कहा जाता है। सामान्य वक्र को हम मेसोकर्टिक (Mesokurtic) कहते हैं।

प्रश्न 2. सम्भावना या सम्भाव्यता के मुख्य प्रमेय कौन-कौन से हैं? सामान्यतया विचलन कितने प्रकार का होता है? अथवा सम्भावना के मुख्य प्रमेय (Theorems) को स्पष्ट करते हुए विकृत-वितरण या विषमता तथा कुकुदता की व्याख्या कीजिये।

वैषम्य और वक्रता-मात्र की प्रमुख प्रकारों के साथ परिभाषा दीजिए और व्याख्या कीजिए। (M.D.U.)

(Define and explain the term skewness and kurtosis along with their main types.)

उत्तर-सम्भावना के प्रमेय (Theorems of Probability)—सम्भावना के मुख्यतः दो प्रमेय हैं—

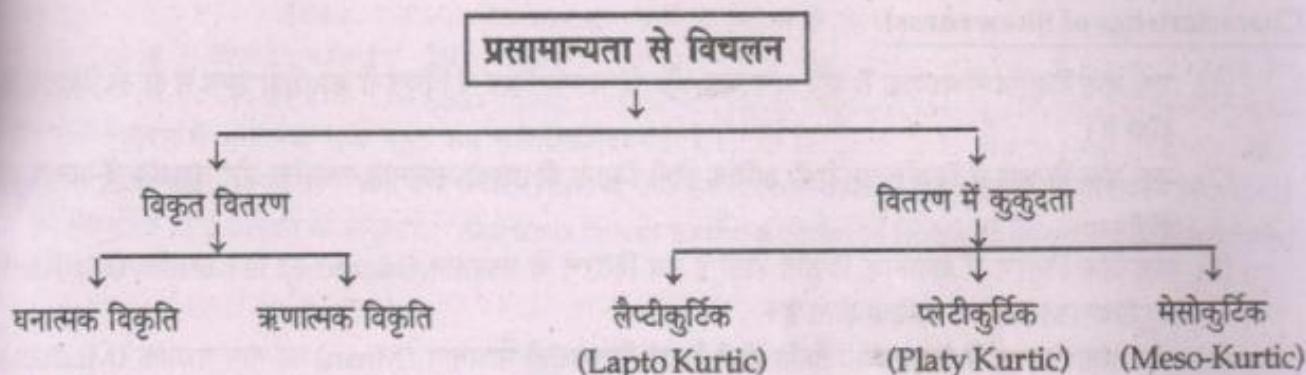
1. Addition Theorems—जब दो या दो से अधिक आपसी विरोधी घटनाओं की सम्भावना का निर्धारण करना ज्यादातर तभी इसका प्रयोग करते हैं। आपसी विरोधी घटनाओं से हमारा मतलब है कि एक घटना के घटित होने पर

होने की सम्भावना नहीं होगी। इस प्रमेय के अनुसार दो या दो से अधिक आपसी विरोधी घटनाओं के घटित होने की सम्भावना के बराबर होती है। उदाहरण-ताश के 52 पत्तों में से एक पत्ता खींचने पर उस पत्ते की सम्भावना $1/52$ होगी। परन्तु एक पत्ता खींचने पर इसकी सम्भावना कि वह पत्ता पान की बेगम है या ईंट का बादशाह इसकी सम्भावना की सम्भावना के योग के बराबर होगी अर्थात् $1/52 + 1/52 = 2/52 = 1/26 = .0385$ होगी।

Multiplication Theorems—इसके अनुसार दो या दो से अधिक परस्पर स्वतंत्र घटनाओं की सम्मिलित सम्भावना प्रत्येक घटना के घटित होने की सम्भावनाओं के गुणनफल (Multiplication) के बराबर होती है। स्वतंत्र घटना से हमारा मतलब है कि घटना के घटित होने का दूसरी घटना के घटित होने पर कोई असर नहीं पड़ता है। उदाहरण—ताश की गड्ढी में से एक पत्ता, जीसरा तथा इसी तरह दूसरे पत्ते खींचने पर एक पत्ता खींचने के बाद निकलने वाले दूसरे पत्ते को प्रभावित नहीं करेगा अर्थात् घटना घटित होने पर घटित होने वाली दूसरी घटना को प्रभावित नहीं करती है। यदि पान का इक्का, बादशाह, बेगम और गुलाम के बाद एक खींचे जाएं तो इनकी सम्मिलित सम्भावना इस प्रमेय के अनुसार $1/52 \times 1/52 \times 1/52 \times 1/52 = 1/7311616$

प्रसामान्यता से विचलन (Deviation from Normality)—प्रसामान्यता से विचलन निम्न दो प्रकार से होता है—

- (1) विकृत-वितरण (Skewed Distribution)
- (2) वितरण में कुकुदता (Kurtosis in Distribution)



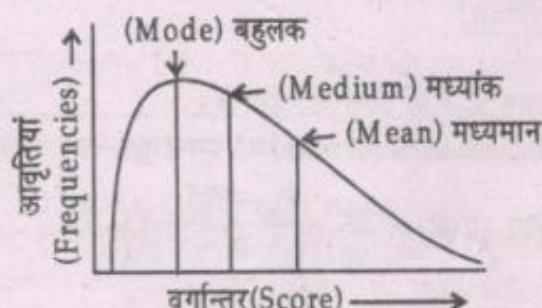
विकृत वितरण

Skewed Distribution)

विकृत वितरण वह है “जिसमें मध्यमान, मध्यांक और बहुलांक बिन्न-बिन्न बिन्दुओं पर होते हैं तथा प्राप्तांक बीच में इकट्ठे न हो कर वक्र के दार्ढी या बार्ढी ओर अधिक इकट्ठे होते हैं” (When the Mean, Median and Mode fall at different points and the balance is shifted to right a left distribution, the distribution is said to be skewed. — Simpson and Kofka 1971)

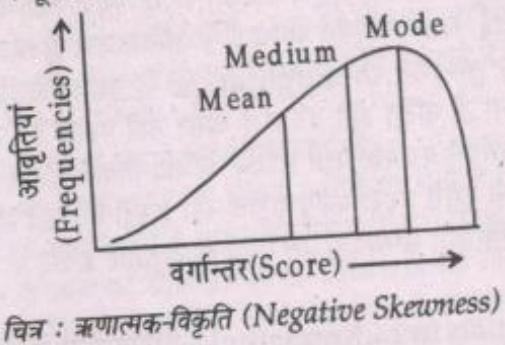
सामान्य वितरण में Mean, Median, Mode बराबर होते हैं इसलिए एक ही बिन्दु पर पड़ते हैं इसलिए विकृति शून्य होती है। एक वितरण के Mean, Median, Mode जितने पास-पास होंगे, वितरण उतना ही सामान्य होगा और विकृति उतनी ही कम होती है। वितरण की विकृति (Skewness) दो प्रकार की है—

(1) घनात्मक विकृति या विषमता (Positive Skewness)—इसमें आंकड़ों का एकत्रीकरण दार्ढी ओर रहता है। इसमें वितरण के मध्यमान का मान वितरण के मध्यांक और बहुलांक मान से अधिक होता है। इसकी दूसरी पहचान यह है कि वितरण में अंकों का जमाव बार्ढी ओर अर्थात् मध्यमान से ऋणात्मक दिशा में रहता है।



चित्र : घनात्मक-विकृति (Positive Skewness)

(2) ऋणात्मक विकृति (Negative Skewness) — जब वितरण में ऋणात्मक विकृति होती है तब वितरण के मध्यमान का मान वितरण के मध्यांक मान और बहुलांक मान से कम होता है। इसकी दूसरी पहचान यह है कि वितरण वक्र का झुकाव अर्थात् आँकड़ों का एकत्रीकरण बाई ओर रहता है। दूसरे शब्दों में प्राप्ताकों का अधिक जमाव दार्दी ओर रहता है।



विषमता या विकृत वितरण की विशेषताएं

(Characteristics of Skewness)

- (1) एक अंक वितरण में मध्यांक से यदि धनात्मक और ऋणात्मक दिशा में विचलनों का योड़ा शून्य न हो तो वितरण विकृत होता है।
- (2) एक अंक वितरण में विकृति उतनी ही अधिक होगी जितना ही उसका मध्यमान, मध्यांक और बहुलांक में अन्तर अधिक होगा।
- (3) जब अंक वितरण में धनात्मक विकृति होती है तब वितरण के मध्यमान (Mean) का मान मध्यांक (Median) और बहुलांक (Mode) से अधिक होता है।
- (4) जब अंक वितरण में ऋणात्मक विकृति होती है तब वितरण के मध्यमान (Mean) का मान मध्यांक (Median) और बहुलांक (Mode) से कम होता है।
- (5) जब अंक वितरण में P_{10} और P_{90} मध्यमान (Mean) से समान दूरी पर नहीं होते हैं तब वितरण विकृत होता है।
- (6) जब अंक वितरण में मध्यमान से Q_1 और Q_3 समान दूरी पर नहीं होते हैं तब वितरण विकृत होता है।
- (7) अंक वितरण में धनात्मक विकृति उस समय होती है जब $(Q_3 - Mdn) > (Mdn - Q_1)$ होगी।
- (8) अंक वितरण में ऋणात्मक विकृति उस समय होती है $\rightarrow (Q_3 - Mdn) = (Mdn - Q_1)$ जब होगा।
- (9) अंक वितरण विकृति उस समय शून्य होती है जब $\rightarrow (Q_3 - Mdn) = (Mdn - Q_1)$ होता है।
- (10) एक अंक वितरण में मध्यमान से D_1 और D_9 यदि समान दूरी पर न हों तो वितरण विकृत होता है।

विकृति या विषमता का मापन

(Measurements of Skewness)

- (1) सापेक्षिक विषमता (Relative Skewness) का गणना सूत्र—

$$SK = \frac{3(\text{Mean} - \text{Median})}{\sigma}$$

इस अवस्था में SK का मान ± 3 के अन्तर्गत रहता है।

- (2) विषयता गुणांक (Co-efficient of Skewness) का गणना सूत्र—

$$(i) \text{ जब Percentile दिए हुए हों— } SK = \frac{P_{90} + P_{10}}{2} - P_{50}$$

$$(ii) \text{ जब Deciles दिए हुए हों— } SK = \frac{D_9 - D_1}{2} - D_5$$

एक वितरण में जब Mean, Median, Mode एक ही बिन्दु पर हों तो वितरण सामान्य होगा। परन्तु केन्द्रीय प्रवृत्ति के इन जितना अधिक अंतर हो विकृति उतनी ही अधिक होती है। जिस प्रकार धनात्मक विकृति में Md और Mo मध्यमान से कम हैं और ऋणात्मक विकृति में Md और Mo मध्यमान से अधिक होते हैं। इसीलिए यदि $M-Mo$ का मान -ve हो तो विषमता -ve होनी और यदि $M-Mo$ का मान +ve हो तो विषमता +ve होगी। अतः निरपेक्ष (Absolute) विकृति का सूत्र—

$$\text{Absolute Skewness} = \text{Mean} - \text{Mode}$$

उदाहरण—यदि एक आवृत्ति वितरण का मध्यमान (M) 16.54 और मध्यांक (Md) 15.87 और प्रामाणिक विचलन (SD) 8.64 हो तो सापेक्षिक विषमता (Relative Skewness) की गणना करो।

$$\text{हल- } SK = \frac{3(\text{Mean} - \text{Median})}{\sigma}$$

$$M = 16.54$$

$$Mdn = 15.87$$

$$\Sigma = 8.64 \text{ इन सबका मान सूत्र में रखने पर—}$$

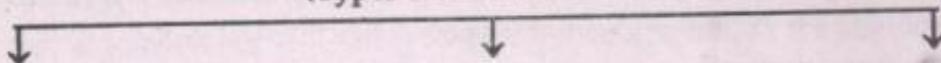
$$SK = \frac{3(16.54 - 15.87)}{8.64}$$

$$= \frac{49.62 - 47.61}{8.64} = \frac{201}{864} = \frac{201}{864} = 0.23$$

यह मान वितरण में धनात्मक तथा बहुत कम सापेक्षिक विषमता है।

कुकुदता (Kurtosis)—जब सम्भावना वक्र चपटा (Flat) या शिखरीय (Peaked) है तो वक्र सामान्य न कहलाकर Kurtosis है। सिम्पसन और कोफ्का के अनुसार, "Kurtosis refers to the degree of flatness or peakedness in the about the mode of a frequency curve."

कुकुदता के प्रकार (Types of Kurtosis)



Lepto Kurtic

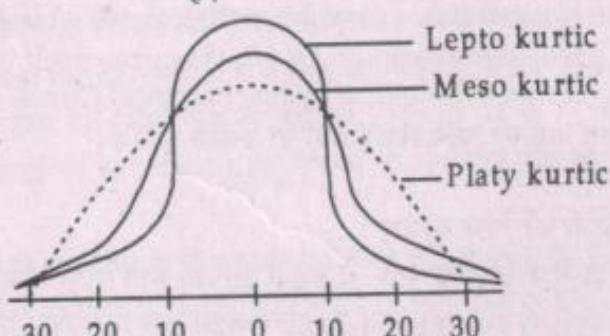
जब सामान्य सम्भावना वक्र की अपेक्षा वक्र अधिक शिखरीय (Peaked) हो तो इस प्रकार के लेप्टोकुर्टिक कहते हैं।

Meso Kurtic

यह यह कुकुदता है जिसमें प्लेटीकुर्टिक और मेसोकुर्टिक दोनों ही विशेषताएं पाई जाती हैं।

Platy Kurtic

जब सामान्य सम्भावना वक्र की अपेक्षा वक्र अधिक चपटा (Flat) होता है तो ऐसे वक्र को प्लेटीकुर्टिक कहते हैं।



Showing different kurtosis

चित्र विभिन्न कुर्टिक का

$$\text{कुर्टीसिस के मापन का सूत्र— } Ku = \frac{Q}{P_{90} - P_{10}}$$

सामान्य से विचलन के कारण (Causes of Divergence from Normality)

- (1) परीक्षण प्रशासन (test administration) में या परीक्षण मूल्यांकन (Scoring) में दोष वितरण वक्र को दोषपूर्ण बताए हैं।
- (2) जब विषयी लोगों ने परीक्षण भरने में नकल (copying or cheating) की हो।
- (3) जिस परीक्षण में शीलिगुणों का मापन किया जा रहा है वह प्रमाणीकृत (Standardized) न हो या बहुत सरल न हो। कठिन है तो आवृत्ति-वितरण वक्र दोषपूर्ण प्राप्त होता है।
- (4) प्रतिदर्श सम्बन्धी दोष वितरण वक्र में असामान्यता पैदा होती है। उदाहरण के लिए, इकाइयों का चुनाव न देना या इकाइयां श्रेष्ठ, श्रेणी (Superior Grade) की हों या निम्न श्रेणी (Low Grade) की हों।
- (5) जब परीक्षण के पदों (items) का विषयी लोगों को पूर्वाभ्यास हो तो भी प्राप्त वितरण वक्र दोषपूर्ण हो सकता है।

लघूत्तरात्मक प्रश्न (Short Answer Type Questions)

प्रश्न 1. सामान्य-सम्भावित वक्र या सामान्य-सम्भावना वक्र का क्या अर्थ है। संक्षेप में बताएं।

अथवा

सामान्य-सम्भावित वक्र को परिभाषित कीजिये।

उत्तर—किसी भी अध्यापक को सामान्य वितरण (Normal Distribution) का बोध होना आवश्यक होता है। अध्यापक जिस भी सांखिकी का प्रयोग करता है वह सामान्य वितरण की धारणाओं पर ही आधारित होती है। साधारणतया इन अधिक संख्या में अवलोकन (Number of Observations) करते हैं, हमारी धारणा (Assumption) यही होती है कि जब उनकी वह संख्या सामान्य रूप से वितरित (Normally Distributed) होती है। उदाहरणार्थ, यदि हमारे अवलोकनों (Observations) की संख्या 400 या अधिक है तो वे अवलोकन सामान्य रूप से वितरित (Normally Distributed) होते हैं। सामान्य-वितरण तभी होगा यदि निम्नलिखित दो शर्तें पूरी होती हों—

- (i) जब अवलोकन अधिनिति (Biased) न हो।
- (ii) जब अवलोकन प्रतिनिधित्व (Observations are representative) हो।

जे.पी. गिलफोर्ड (J.P. Guilford) ने सामान्य संभावित वक्र को इस प्रकार परिभाषित किया है—“सामान्य संभावित वक्र एक सुपरिभाषित, सुरचित तथा गणितीय वक्र है जिसके वितरण का मध्यमान शून्य तथा तीन प्रामाणिक विचलन के समान होता है। प्रामाणिक विचलन मान = 1 होता है। यह वक्र स्वयं में गणितीय संप्रत्यय होता है। यह प्रकृति में नहीं होता है, न ही यह मनोवैज्ञानिक वक्र है।” (Normal Probability Curve is a well defined, well structured, mathematical curve having a distribution of 3 scores mean and S.D. = 1, the curve itself is a mathematical conception, does not occur in nature, it is not a Biological or Psychological Curve.—J.P. Guilford)

प्रश्न 2. सामान्य-सम्भावना वक्र की मुख्य विशेषताओं पर प्रकाश डालिये।

(M.D.U. 1st Sem.)

अथवा

सामान्य वक्र की विशेषताओं को स्पष्ट कीजिए।

उत्तर—अंकों के सामान्य वितरण के परिणामस्वरूप जो वक्र (Curve) बनते हैं उसे सामान्य वक्र (Normal Curve) या संभावित वक्र (Normal probability curve) कहते हैं। इस वक्र की कुछ विशेषताएं होती हैं जिन्हें समझना अति जटिल नहीं ये विशेषताएं निम्नलिखित हैं—

1. इस वक्र में एक रेखा खींच देने से यह वक्र दो बराबर हिस्सों में बंट जाता है। दोनों तरफ 50-50% (Frequencies) होती हैं।
2. इस वक्र में मध्यमान विन्दु पर वक्र की ऊँचाई अधिकतम होती है। यह ऊँचाई कुल आवृत्तियों अर्थात् N की होती है।